Subject: Year: Month: Date:

سینماتیک

تندی متوسط $(\bar{u}) = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ تندی لحظه‌ای $(u) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

سرعت متوسط $(\vec{\bar{v}}) = \frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان}} = \frac{\vec{\Delta d}}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta d}}{\Delta t}$

شتاب متوسط $(\vec{\bar{a}}) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ شتاب لحظه‌ای $(\vec{a})$ $\vec{a} = \lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$

۱) $\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\Delta t}$ ۲) $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$

۳) $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{v} \Delta t$ اگر شتاب ثابت باشد $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$

۵) $x_2 = x_1 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a t^2$ ۶) $v_{2x}^2 - v_{1x}^2 = 2a \Delta y$

۷) $\vec{r} = x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$ ۸) $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v} \Delta t$

۹) $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ ۱۰) $\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2 = 2a(\Delta r)$

مثال: در یک تقاطع خودروها پشت سر هم و به صورت سپر به سپر متوقف شده‌اند. طول هر خودرو 4m است و شتاب هر خودرو $2 m/s^2$ می‌باشد اگر خودروی اول به محض سبز شدن چراغ شروع به حرکت کند و خودروی nام زمانی شروع به حرکت کند که خودروی جلویی آن 1m از آن فاصله بگیرد به مدت زمان 4s

سبز شدن چراغ چند خودرو از تقاطع می‌گذرد؟

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

۴ $۲m/s^۲$ ۷۰ $1m$

زمان لازم برای برخورد تقطیع پنجره و آغاز حرکت = زمان انتظار

۰	۲	
$1s$	$۲\sqrt{۲}$	$x = \frac{1}{۲}at^۲$
$۲s$	$۲\sqrt{۳}$	$۴ = \frac{1}{۲}\times ۲\times t^۲ \Rightarrow t = ۲s$
$۳s$	$۲\sqrt{۴}$	$۸ = \frac{1}{۲}\times ۲\times t^۲ \Rightarrow t = ۲\sqrt{۲}s$
⋮		
$(n-1)s$	$۲\sqrt{n}$	$۱۲ = \frac{1}{۲}\times ۲\times t^۲ \Rightarrow t = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$
		$۱۶ = \frac{1}{۲}\times ۲\times t^۲ \Rightarrow t = \sqrt{۱۶} = ۲\sqrt{۴}$
		$n = ۲\sqrt{n}$

$$(n-1)+۲\sqrt{n} = ۷۰$$

$\sqrt{n} = u \quad u^۲ - ۱ + ۲u = ۷۰ \Rightarrow u^۲ + ۲u - ۷۱ = ۰ \quad u = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴+۲۸۴}}{۲} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲۸۸}}{۲}$

$\frac{-۲+۱۶\sqrt{۱۱}}{۲} = \frac{۱۳۰/۷۶}{۲} = ۶۵/۳۸ \quad n = u^۲ = ۴۲۷۱۹$

حرکت در امتداد قائم (متقوط آزاد)

۱) $V_y = V_{۰y} - gt$

۲) $y = y_۰ + V_{۰y}t - \frac{1}{۲}gt^۲$

۳) $V_y^۲ - V_{۰y}^۲ = -۲gh$

مثال: سنگی در امتداد قائم رو به بالا پرتاب می‌شود در مسیر رو به بالایش در نقطه A دارای سرعت $۷\sqrt{۲}$ می‌شود

و در نقطه B (۳متر بالاتر از نقطه A) سرعتش $\frac{V}{۲}$ می‌شود سرعت V و حداکثر ارتفاعی که ذره پس از نقطه A

نقطه	سرعت
A	V
B	$V/۲$

می‌کند چقدر است؟

میران

$\Delta h = ۳m = h_B - h_A$

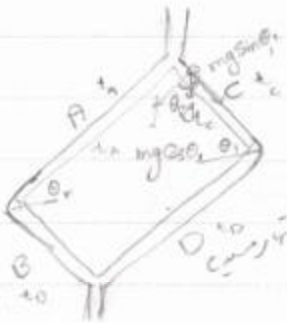
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$V_2^2 - V_1^2 = -2g\cdot\Delta h \Rightarrow (\frac{V_1}{2})^2 - V_1^2 = -2\times10\times3 \Rightarrow \frac{V_1^2}{4} - V_1^2 = -60 \Rightarrow V_1^2 - 4V_1^2 = 240$

$V_1^2 = 80 \Rightarrow V_1 = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, $V_B = 2\sqrt{5}$

$V_B^2 - V_0^2 = -2gh \Rightarrow -20 = -2\times10\times h \Rightarrow h = 1m$

* مثال ①: وسیله‌ای به شکل مستطیل ABCD روی سطح افقی قرار دارد. دو توپ A و B از نقطه‌ی A به طرف بالا و در امتداد دو ضلع AB و AD پرتاب می‌شوند. اگر توپ A در لحظه‌ی t_A و توپ B در لحظه‌ی t_B به نقطه‌ی C برسند، در لحظه‌ی t_C توپ C از نقطه‌ی C و در لحظه‌ی t_D توپ D از نقطه‌ی D به زمین برخورد می‌کند. t_C و t_D را بر حسب t_A و t_B بیابید.



$$\begin{cases} a_C = g\sin\theta_1 \\ a_D = g\sin\theta_2 \\ a_A = g\sin\theta_2 \\ a_B = g\sin\theta_1 \end{cases}$$

چون انرژی اتلاف نمی‌شود ⇓

$V_B = V_D \Rightarrow g\sin\theta_2 t_A + g\sin\theta_1 t_B = g\sin\theta_1 t_C + g\sin\theta_2 t_D$

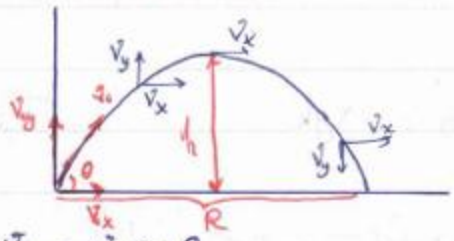
پایستگی سرعت چه می‌دهد؟

$$\begin{cases} V_C = V_0 + at_C = g\sin\theta_1 t_C \\ V_D = V_0 + at_D = g\sin\theta_1 t_C + g\sin\theta_2 t_D \\ V_A = V_0 + at_A = g\sin\theta_2 t_A \\ V_B = V_0 + at_B = g\sin\theta_2 t_A + g\sin\theta_1 t_B \end{cases}$$

سرعت در راستا و جهت

حرکت پرتابی:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$



$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$V_{0x} = V_0\cos\theta$

$V_{0y} = V_0\sin\theta$

$\Delta x = V_0 x t = V_0\cos\alpha t$

$\Delta y = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = V_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

زمان رسیدن به ارتفاع اوج: $t = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$ ارتفاع اوج: $h = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

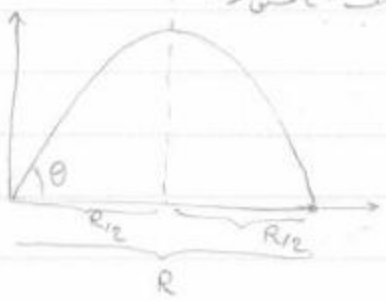
برد: $R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ زمان رسیدن به برد: $t_R = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta x = V_0 \cos\alpha\, t \\ x = V_0 \cos\alpha\, t \end{array}\right\}$ انتقال مبدأ مختصات به نقطه پرتاب $\Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$

$y = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2$

$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2\alpha}$ معادله مسیر

مثال: اگر پرتابه‌ای با اندازه سرعت ثابت پرتاب شود فاصله پرتابه از مبدأ ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد در صورتی که پرتابه تحت زاویه بزرگتر از ۹۰ نیز پرتاب شود وضعیت به همین منوال خواهد بود در حالیکه اگر پرتابه به صورت افقی پرتاب شود فاصله پرتابه از مبدأ همواره افزایشی خواهد بود مطلوب است تعیین زاویه پرتابی که این دو زاویه از هم جدا می‌شوند؟ (برای این منظور از چند مثال عددی استفاده نمایید)



مثال: اگر جسمی که از حالت سکون شروع به سقوط آزاد می‌کند در ثانیه آخر حرکت زمان دار ارتفاع سقوط را بیابید:

$V_{0y}^2 - V_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow V_y^2 = +2gh \rightarrow V_y = \sqrt{2gh}$

$V_{Ay}^2 - 0 = -2g\frac{h}{2} \Rightarrow V_{Ay}^2 = -gh \Rightarrow V_A = \sqrt{gh}$

میران

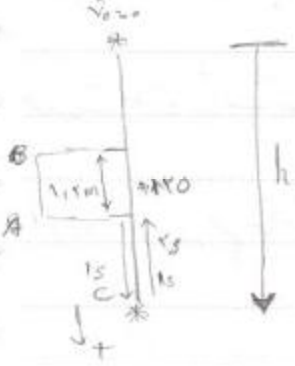
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$V = V' + gt \Rightarrow \sqrt{gh} = \sqrt{gh} + g \times 1 \Rightarrow \sqrt{gh} - \sqrt{gh} = g \Rightarrow gh + gh - 2\sqrt{2}gh = g^2 \Rightarrow$

$(2 - 2\sqrt{2})gh = g^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2 - 2\sqrt{2}} = \Delta V$

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t \cong 2{,}4\,s$

یک تکه نوشته از بام ساختمانی رها می‌شود ($V_0 = 0$) که از جلوی پنجره‌ای به بلندی $1{,}2\,m$ عبور می‌کند. این تکه نوشته در مدت $0{,}2\,s$ از لبه بالا تا لبه پایین پنجره را طی می‌کند. این تکه نوشته به سقوط خود ادامه می‌دهد و پس از برخورد با سطح پیاده‌رو دقیقاً با سرعت برخورد به زمین برمی‌گردد (برخورد کشسان) و $2\,s$ بعد از برگشتن از لبه پایین پنجره محدداً در آن رها می‌شود. ارتفاع ساختمان چقدر است؟



در مسیر AB: $\begin{cases} V_A = V_B + gt_{AB} \\ V_A^2 - V_B^2 = 2gh \end{cases} \Rightarrow (V_B + gt_{AB})^2 - V_B^2 = 2gh$

$\Rightarrow 2V_B gt_{AB} + (gt_{AB})^2 = 2gh$

$V_B = \frac{2gh - (gt)_{AB}^2}{2(gt)} = \frac{2 \times 10 \times 1{,}2 - (10 \times 0{,}125)^2}{2 \times 10} = 8{,}97\ m/s$

$V_A = 8{,}97 + (10)(0{,}125) = 10{,}22\ m/s$

$V_C = V_A + gt_{AC} \Rightarrow 10{,}22 + 10 \times 1 = 20{,}22\ m/s$

$h = \frac{V_C^2 - V_0^2}{2g} = \frac{(20{,}22)^2 - 0}{2 \times 10} \cong 21\,m$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

ادامه مثال ①:

$$\sin\theta_2 t_A + \sin\theta_1 t_B = \sin\theta_1 t_C + \sin\theta_2 t_D$$

$$\sin\theta_2 t_A - \sin\theta_2 t_D = \sin\theta_1 t_C - \sin\theta_1 t_B \Rightarrow \sin\theta_2 (t_A - t_D) = \sin\theta_1 (t_C - t_B)$$

$$\sin\theta_2 < \sin\theta_1 \Rightarrow t_A - t_D > t_C - t_B \Rightarrow t_A + t_B > t_C + t_D$$

ادامه مثال ②: $y = u^n \quad y' = nu'u^{n-1}$

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = V_0 \cos\alpha t \quad y = V_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= \left((V_0 \cos\alpha t)^2 + \left(V_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \right)^2 \right)^{1/2} = \left(V_0^2 \cos^2\alpha t^2 + V_0^2 \sin^2\alpha t^2 - V_0 g \sin\alpha t^3 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \right)^{1/2}$$

$V_0^2 t^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$r(t) = \left(V_0^2 t^2 - V_0 g \sin\alpha t^3 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \right)^{\frac{1}{2}} = t^2 \left(V_0^2 - V_0 g \sin\alpha t + \frac{1}{4} g^2 t^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left(V_0^2 t^2 - V_0 g \sin\alpha t^3 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \right)^{-1/2} \left(2 V_0^2 t - 3 V_0 g \sin\alpha t^2 + g^2 t^3 \right) = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2 V_0^2 t - 3 V_0 g \sin\alpha t^2 + g^2 t^3}{\left(V_0^2 t^2 - V_0 g \sin\alpha t^3 + \frac{1}{4} g^2 t^4 \right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow t \left(\underbrace{2 V_0^2}_{c} - \underbrace{3 V_0 g \sin\alpha t}_{b} + \underbrace{g^2 t^2}_{a} \right) = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 V_0 g \sin\alpha \pm \sqrt{9 V_0^2 g^2 \sin^2\alpha - 8 V_0^2 g^2}}{2 g^2}$$

برای اینکه R یک عدد حقیقی باشد $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 9 V_0^2 g^2 \sin^2\alpha - 8 V_0^2 g^2 < 0 \Rightarrow 9 V_0^2 g^2 \sin^2\alpha < 8 V_0^2 g^2 \Rightarrow \sin^2\alpha < \frac{8}{9}$

$$\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0.943 \Rightarrow \alpha < \sin^{-1}(0.943) \qquad \alpha < 70^\circ$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

قانون اول نیوتون: قانون لختی - قانون اینرسی: اگر به جسمی نیروی وارد نشود آن جسم وضعیت خود را حفظ می‌کند

دینامیک: قانون دوم نیوتون: برآیند نیروهای وارد بر جسم به آن جسم شتاب می‌دهد به طوری که جرم جسم و شتاب عکس دارد.

$\vec{F} = m\vec{a}$ $kg\frac{m}{s^2}$ $[M \cdot LT^{-2}]$ عمل اعدادی

قانون سوم نیوتون: هر عملی عکس العملی است در خلاف آن و هم اندازه با آن.

$1x \longrightarrow \longleftarrow x^2$

F_{12} وارد شونده به 1 — F_{21} وارد شونده به 2

$\vec{w} = m\vec{g}$

نیروی عمودی سطح (N): نیرویی است که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود عمود بر سطح است.

وزن ظاهری: نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند و اگر حرکت شتاب‌دار نباشد با نیروی وزن برابر است و برعکس.

$f_{kinetic} = \mu_k N$ $f_s \leqslant \mu_s N$ $f_{smax} = \mu_s N$

$\mu > 0$ $\mu_k < \mu_s$

میران

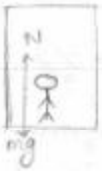
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مثال: وزن ظاهری فرد ج را برای حالات مختلف حرکت آسانسور محاسبه کرده و بنویسید که در کدام حالت ها مرد احساس سبکوزنی می کند و در کدام حالت ها احساس کم وزنی خواهد داشت؟

برای نوشتن قانون دوم نیوتون در امتداد قائم نیروهای رو به بالا را مثبت و نیروهای رو به پایین را منفی در قانون دوم نیوتون شرکت می کنند. حرکت تند شونده با شتاب مثبت خواهد بود و حرکت کند شونده با شتاب منفی خواهد بود.

	رو به بالا (+)	رو به پایین (−)
تند شونده +	+	−
کند شونده −	−	+

و در حرکت رو به پایین و کند شونده با شتاب مثبت خواهد بود.



$N - mg = ma \rightarrow N = ma + mg \rightarrow N = m(a+g)$

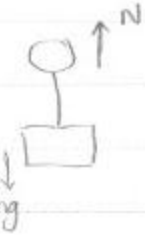
- رو به بالا تند شونده: $a > 0 \Rightarrow N > mg$ سبکوزنی
- رو به پایین کند شونده: $a < 0 \Rightarrow N < mg$ کم وزنی
- رو به پایین تند شونده: $a < 0 \Rightarrow N < mg$ کم وزنی
- رو به بالا کند شونده: $a > 0 \Rightarrow N > mg$ سبکوزنی

تذکر به هدف افتادن: ثابت کردیم که اگر هواپیمایی به سمت هدف آویزان از سقف شلیک شود هواپیمای که در لحظه شلیک هدف از سقف رها شود حتماً به هدف اصابت می کند به شرطی که هواپیما از ارتفاع کافی هدف و سقاد شلیک شده باشد.

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مثال: یک بالن تحقیقاتی به جرم M با شتاب عمودی a در حال سقوط است. چند آزمون‌های تعادل بیرامون بالن دور ریخته شود تا بالن با شتاب a به سمت بالا صعود کند. (فرض بر آن است که نیروی بالابرنده بالن در هر دو حالت یکسان است)

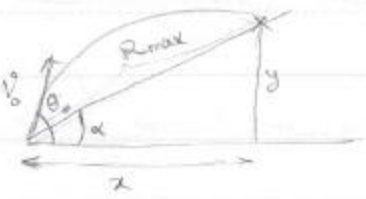


$$\left.\begin{array}{l} \text{سقوط}: mg - N = ma \\ \text{صعود}: N - m'g = m'a \end{array}\right\} \rightarrow mg - m'g = ma + m'a$$

$$m(g-a) = m'(g+a) \rightarrow m' = \frac{g-a}{g+a}m$$

$$\Delta m = m - m' = m - \frac{g-a}{g+a}m = \frac{2a}{g+a}m$$

توپی مطابق شکل به گونه‌ای شلیک شده است که توسط توپی با سرعت اولیه V_0 به طرف بالا و تحت زاویه‌ای با شیب α نسبت به افق شلیک می‌شود. با چه زاویه‌ای نسبت به افق شلیک شود تا بیشترین برد در دامنه تپه به دست آید؟



$x = R\cos\alpha$ تصویر شعاع بردار بر محور

$y = R\sin\alpha$ α زاویه شیب تپه

$$y = x\,tg\theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\theta_0} \Rightarrow R\sin\alpha = R\cos\alpha\, tg\theta_0 - \frac{gR^2\cos^2\alpha}{2V_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$\Rightarrow \frac{gR\cos^2\alpha}{2V_0^2\cos^2\theta_0} = \cos\alpha\, tg\theta_0 - \sin\alpha \Rightarrow R = \frac{2V_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^2\alpha}(\cos\alpha\, tg\theta_0 - \sin\alpha)$$

$$= \frac{2V_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos\theta_0(\cos\alpha\sin\theta_0 - \sin\alpha\cos\theta_0) \Rightarrow R = \frac{2V_0^2\cos\theta_0}{g\cos^2\alpha}\sin(\theta_0 - \alpha)$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$\frac{dR}{d\theta_0} = 0 \Rightarrow -\sin\theta_0 \sin(\theta_0 - \alpha) + \cos\theta_0 \cos(\theta_0 - \alpha) = 0 \Rightarrow \cos(2\theta_0 - \alpha) = 0$$

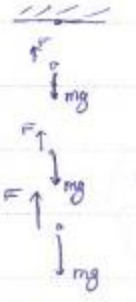
$$2\theta_0 - \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

نیروی مقاومت هوا:

$f \propto$ شکل جسم (سطح مقطع)

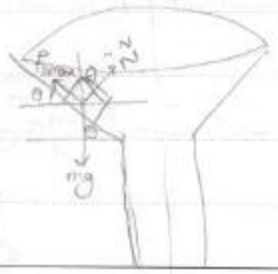
$f \propto (v)$ سرعت $\qquad \vec{f} = -b\vec{v}$

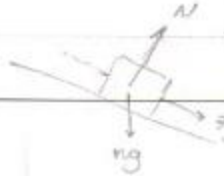
نیروی مقاومت وابستگی به شکل و سطح مقطع جسم و خیلی مختلفی که حرکت در آن صورت می‌پذیرد.



جسم آغاز در ابتدای حرکت هیچ نیروی مقاومی هوا را حس نمی‌کند و تنها نیروی وارد بر آن mg خواهد بود که سبب شتاب گیری و افزایش سرعت جسم می‌شود. به نیروی مقاومت هوا که با نیروی mg برابر می‌شود و حرکت با افزایش سرعت نیروی مقاومت هوا آهسته آهسته رشد پیدا می‌کند تا لحظه‌ای که برآیند نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن برابر شود از آن لحظه به بعد جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد این سرعت به سرعت حدی مشهور است (گفته‌های فوق زمانی صادق است که ارتفاع پرتاب کافی زیاد باشد)

مثال: مطلوب است تعیین حداقل و حداکثر سرعت زاویه‌ای که قیف می‌تواند دوران کند بدون آنکه توپ‌ها که در داخل قیف ثابت بماند؟ (در حالتی که حداکثر حرکت دورانی هستند به هر کدام تجزیه نیرو کنید)

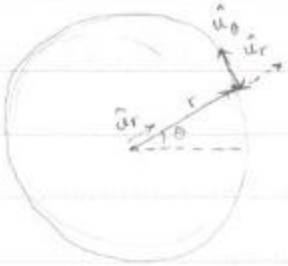




حالت دوم را در انتها در دفتر رسم نوشته شود

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

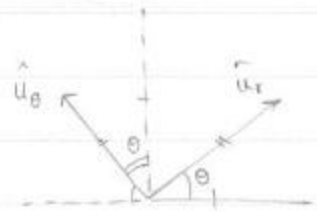


حرکت دایروی:

$$a = \frac{v^2}{r} = rw^2$$

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \qquad \hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$u_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + rw\hat{u}_\theta$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})w = \hat{u}_\theta w$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \left(\frac{dr}{dt}\right)w\hat{u}_\theta + r\hat{u}_\theta\frac{dw}{dt} + rw\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})w = -(\cos\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})w = -\hat{u}_r w$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}w\hat{u}_\theta + \frac{dr}{dt}wu_\theta + r\frac{dw}{dt}\hat{u}_\theta - rw^2\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - rw^2\right)\hat{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}w + r\frac{dw}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

(منفی بودن: جابجایی بردار — سرعت نیروی کوریولیس)

حرکت نسبی:

$$\vec{V}_{PG} = \vec{V}_{Pb} + \vec{V}_{bG}$$

(نسبی)

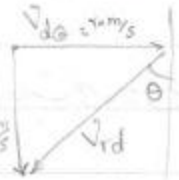
قطارت با سرعت $54\ \frac{Km}{h}$ یا $15\ m/s$ به صورت تمام می‌رود از دور شعله‌ای که با سرعت

دوچال شعله‌ای است تحت چه زاویه‌ای دیده می‌شود؟

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$\vec{V}_{rG} = \vec{V}_{rd} + \vec{V}_{dG} \rightarrow \vec{V}_{rd} = \vec{V}_{rG} - \vec{V}_{dG}$

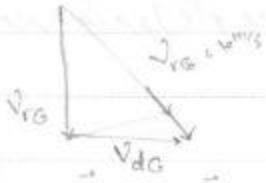


$V_{rG} = 10 m/s$

$V_{dG} = 72 km/h = 20 m/s$

$tg\theta = \frac{V_{dG}}{V_{rG}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \theta = 63^\circ$

قطارات باران که تحت اثر باد تحت زاویه 30° نسبت به تام با سرعت $10m/s$ می بارند از دید ساکن ای



به صورت قائم مشاهده می شوند ؛ سرعت باد چقدر است ؟

$\vec{V}_{rG} = \vec{V}_{rd} + \vec{V}_{dG} \rightarrow \vec{V}_{dG} = \vec{V}_{rG} - \vec{V}_{rd}$ $\quad V_{dG} = 10 \sin 30 = 5 m/s$

پله برقی می تواند فرد ساکن ایستاده ای را در 30s از طبقه اول به طبقه دوم برساند در صورتی که پله برقی خاموش باشد فرد در 20s از طبقه اول به طبقه دوم می رود حال اگر فرد از پله برقی در حال حرکت خود نیز روبه بالا حرکت کند در چند ثانیه فاصله دو طبقه را می پیماید ؟

$V_{PG} = V_{Pe} + V_{eG}$ پرش

$\frac{L}{t} = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{3L + 2L}{60} = \frac{5L}{60} \quad t = \frac{60}{5} = 12s$

در مثال قبل اگر فرد ساکن سرعت نخواهد از طبقه دوم به طبقه اول بیاید آیا این امر امکان پذیر خواهد بود در صورت امکان پذیر بودن چند ثانیه طول می کشد ؟

$V_{PG} = V_{Pe} + V_{eG}$

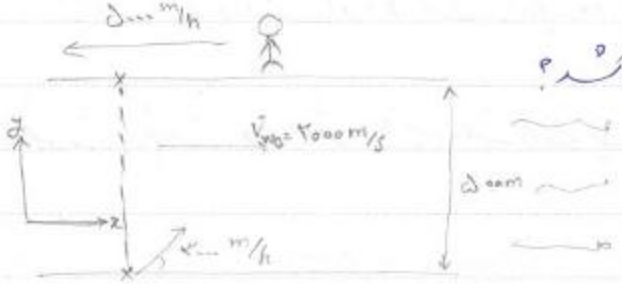
پله برقی است که فرد از طبقه دوم به طبقه اول می آید.

$\frac{L}{T} = -\frac{L}{20} + \frac{L}{30} = -\frac{3L + 2L}{60} = -\frac{5L}{60} \Rightarrow t = 60s$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مثال: فردی می‌خواهد از رودخانه‌ای به عرض ۵۰۰m شنا کند. سرعت پارو زدن مرد نسبت به آب ۲۰۰۰ m/h و سرعت جریان آب ۲۰۰۰ m/h است. اگر سرعت حرکت مرد در ساحل رودخانه ۵۰۰۰ m/h باشد، پیدا کنید مسیری را که شخص باید بپیماید تا کمترین زمان ممکن را برای رسیدن به نقطه مقابل نقطه حرکت خود بزند؟ در این صورت این مسیر چقدر طول می‌کشد؟



$$\vec{V}_{PG} = \vec{V}_{PW} + \vec{V}_{WG}$$

$$V_{PG_x} = V_{PW_x} + V_{WG_x} = V_{PW}\cos\theta + V_{WG_x} = ۲۰۰۰\cos\theta + ۲۰۰۰$$

$$V_{PG_y} = V_{PW_y} + V_{WG_y} = V_{PW}\sin\theta + V_{WG_y} = ۲۰۰۰\sin\theta + ۰$$

$$T = t_{\text{پارو زدن}} + t_{\text{پیاده روی}} \qquad L = V_{PG_y} T \Rightarrow ۵۰۰ = ۲۰۰\sin\theta\, t \Rightarrow t_{\text{پارو زدن}} = \frac{۱}{۴\sin\theta}$$

برای آنکه برایم در مدت زمان پارو زدن چقدر از نقطه هدف منحرف شده‌ایم تا واقعی سرعت مرد نسبت به زمین را در مدت زمان پارو زدن ضرب می‌کنیم.

میزان انحراف مرد از نقطه هدف $x = \left(۲۰۰۰\cos\theta + ۲۰۰۰\right)\frac{۱}{۴\sin\theta} = ۵۰۰\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{۱۰۰۰}{۴\sin\theta}$

$$t_{\text{پیاده روی}} = \frac{x}{V_{\text{پیاده روی}}} = \frac{۵۰۰\cot\theta + \frac{۱۰۰۰}{۴\sin\theta}}{۵۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰}\cot\theta + \frac{۱}{۱۵\sin\theta}$$

$$T = t_{\text{پارو زدن}} + t_{\text{پیاده روی}} = \frac{۱}{۱۰}\cot\theta + \frac{۱}{۱۵\sin\theta} + \frac{۱}{۴\sin\theta} = \frac{۲\cos\theta + ۶ + ۵}{۳۰\sin\theta}$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$\omega_{min}\begin{cases} x: N\sin\theta - f_{smax}\cos\theta = mr\omega_{min}^2 \\ y: N\cos\theta + f_{smax}\sin\theta = mg \end{cases} \xrightarrow{f_{smax}=\mu_s N} \begin{matrix} N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = mr\omega_{min}^2 \ (2) \\ N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg \ (1) \end{matrix}$$

یک مثال:

$$\frac{(2)}{(1)}\quad \frac{N(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)}{N(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)} = \frac{mr\omega_{min}^2}{mg} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{r}\,\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}}$$

$$x: N\sin\theta + f_{smax}\cos\theta = mr\omega_{max}^2 \qquad N\sin\theta+\mu_s N\cos\theta = mr\omega_{max}^2$$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow$$

$$y: N\cos\theta - f_{smax}\sin\theta = mg \qquad N\cos\theta-\mu_s N\sin\theta = mg$$

$$\frac{(2)}{(1)}\quad \frac{N(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)}{N(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)} = \frac{mr\omega_{max}^2}{mg} \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{r}\,\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}}$$

ادامه مثال صفحه:

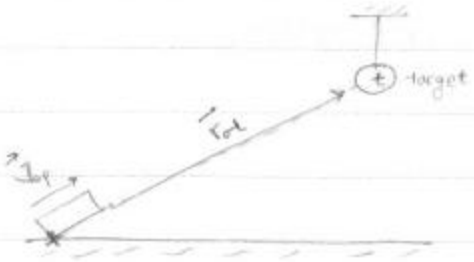
$$T = \frac{r\cos\theta+v}{r_0\sin\theta}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{-r\sin\theta(r_0\sin\theta)-r_0\cos\theta(r\cos\theta+v)}{(r_0\sin\theta)^2} = 0 \Rightarrow -90\sin^2\theta - 90\cos^2\theta - 210\cos\theta = 0$$

$$90(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = -210\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-90}{210} = -\frac{3}{7} \Rightarrow \theta = 115^\circ$$

$$T = \frac{r\cos 115^\circ + v}{r\sin 115^\circ} = 0/211$$

تمرین: پرتاب به هدف در حال سقوط:



$$\text{موشک}: \vec{r} = \vec{r}_{0p} + \vec{v}_{0p}t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\text{هدف اصلی}: \vec{r}_t = \vec{r}_{0t} + \vec{v}_{0t}t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

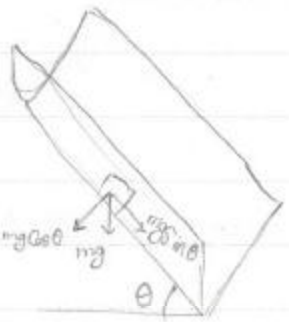
$$\text{شرط برخورد}: \vec{r}_p = \vec{r}_t \Rightarrow \vec{v}_{0p}t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 = \vec{r}_{0t} + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{0t} = \vec{v}_{0p}t}$$

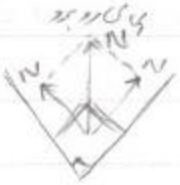
میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

تمرین 30 فصل 5

مثال: سطح شیب‌داری با زاویه θ نسبت به افق مفروض است. جسمی به جرم m در روی سطح شیب‌دار با شتاب a به سمت پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح شیب‌دار μ_k است. a را بیابید.





$$N'^2 = N^2 + N^2 = 2N^2$$

$$mg\cos\theta = N' = \sqrt{2}N$$

$$N = \frac{mg\cos\theta}{\sqrt{2}}$$

$$mg\sin\theta - f_k = ma \Rightarrow mg\sin\theta - 2\mu_k N = ma$$

$$mg\sin\theta - 2\mu_k \frac{mg\cos\theta}{\sqrt{2}} = ma \Rightarrow \boxed{a = g\sin\theta - \sqrt{2}\mu_k g\cos\theta}$$

میران

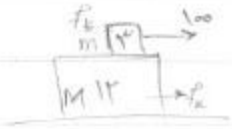
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

تخته سنگی به جرم ۱۲kg روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد قطعه سنگ دیگری به جرم ۳kg

بر روی تخته سنگ قرار داده شده است ضریب اصطکاک ایستایی بین دو تخته سنگ ۰/۵ و ضریب اصطکاک

جنبشی ۰/۳ می باشد اگر نیروی ۱۰۰N به قطعه سنگ ۳kg وارد شود شتاب هریک از دو تخته سنگ را بیابید.

حداکثر نیروی F را بیابید که اگر بر قطعه پایینی وارد شود دو جسم با هم حرکت می کنند.

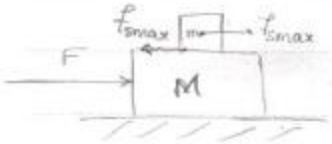


$f_s = \mu_s N = 0/5 \times 30 = 15$

چون: $100 > 15 \Rightarrow$ جسم m نسبت به M می لغزد

$m: F - f_k = ma \Rightarrow 100 - 0/3 \times 30 = 3a \Rightarrow a = 30/3\ m/s^2$

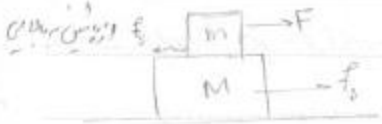
$M: f_k = Ma \Rightarrow a = \frac{0/3 \times 30}{12} = \frac{9}{12} = 0/75\ m/s^2$



$f_{smax} = \mu_s N = 15\ N$

$f_{smax} = ma \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5\ m/s^2$

$M: F - f_{smax} = Ma \Rightarrow F - 15 = 12 \times 5 \Rightarrow F = 75N$

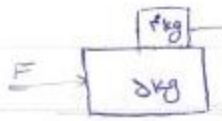


pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

$$f(T) = \frac{1}{1+e^{\frac{E-E_f}{KT}}} \qquad \frac{dF}{dT} = \frac{0 + \frac{E-E_T}{KT^2} e^{\frac{E-E_f}{KT}}}{\left(1+e^{\frac{E-E_f}{KT}}\right)^2} \qquad e^{u} \cdot u' e^{u}$$

حداقل نیرویی که وزنه ۴kg روی وزنه زیری نلغزد؟



$f_{smax} = 12N$

$= \mu_s N = \mu_s 40$

$M: F - f_{smax} = Ma$

$m: f_{smax} = ma \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow a = 3 m/s^2$

$F - 12 = (5)3 a \Rightarrow F = 27N$

برای حالتی که جسم‌ها نسبت به سطح زمین اصطکاک داشته باشند ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۳ می‌باشد

مسئله ۲۵ فصل ۴: قطاری با سرعت ۲۷ m/s نسبت به زمین در بارانی که به دلیل وزش باد مقابل به جلو است به سمت جلو حرکت می‌کند از دید ناظری که بر روی زمین ایستاده است مسیر قطره‌های باران با راستای قائم زاویه ۲۱/۴° می‌سازد ولی ناظری که در قطار نشسته است رد قطره‌های باران را بر شیشه پنجره کاملاً قائم می‌بیند سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

$$f(T) = \frac{1}{1+e^{\frac{E-E_f}{KT}}} \qquad \frac{dF}{dT} = \frac{0 + \frac{E-E_T}{KT^2} e^{\frac{E-E_f}{KT}}}{\left(1+e^{\frac{E-E_f}{KT}}\right)^2} \qquad e^{u} = u'e^{u}$$

حداقل نیرویی که وزنه ۴kg روی وزنه زیری نلغزد؟

$f_{smax} = 12N$

$= \mu_s N = \mu_s 40$

$M: F - f_{smax} = Ma$

$m: f_{smax} = ma \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow a = 3 m/s^2$

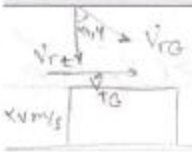
$F - 12 = (8)a \Rightarrow F = 36N$

برای حالتی که جسم‌ها بین سطح زمین اصطکاک داشته باشند ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۳ می‌باشد

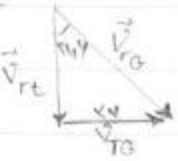
مسئله ۲۹ فصل ۴: قطاری با سرعت ۲۷m/s نسبت به زمین در بارانی که به دلیل وزش باد مقابل به جلو است به سمت جلو حرکت می‌کند از دید ناظری که بر روی زمین ایستاده است مسیر قطره‌های باران با راستای قائم زاویه ۲۱/۴° می‌سازد ولی ناظری که در قطار نشسته است رد قطره‌های باران را بر شیشه پنجره‌ها قائم می‌بیند سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است.

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

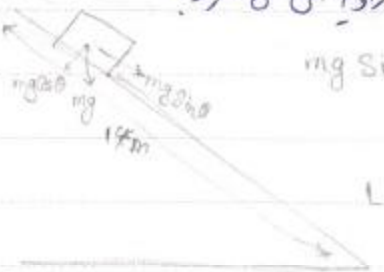


$$\vec{V}_{rG} = \vec{V}_{rt} + \vec{V}_{TG}$$



$$\sin 21,4 = \frac{V_{TG}}{V_{rG}} = \frac{25}{V_{rG}} \Rightarrow \vec{V}_{rG} = 69,4 \text{ m/s}$$

تمرین ۱۱ فصل ۵: جسمی از بالای یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی به طول ۴m از حالت سکون رها می‌شود. این جسم همراه با fs به انتهای سطح می‌رسد. در لحظه‌ای که جسم دومی از پایین به روی سطح شیب‌دار با سرعت اولیه ۱۰ به طرف بالا پرتاب می‌شود که در برگشت هم‌زمان با جسم اول به پایین سطح می‌رسد. الف) شتاب هر یک از دو جسم بر روی سطح شیب‌دار ب) سرعت اولیه جسم دوم ج) چه زاویه‌ای می‌سازد؟



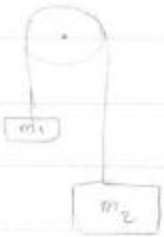
$$mg\sin\theta - 0 = ma \rightarrow a = g\sin\theta \Rightarrow 2 = 10\sin\theta \Rightarrow \theta = 11,5$$

$$L = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 16 = \frac{1}{2}a(4)^2 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

بر روی سطح شیب‌دار بالا

$$V = V_0 + a \rightarrow 0 = V_0 - 2\times 2 \Rightarrow V_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$V^2 - V_0^2 = 2ax \Rightarrow 0 - (4)^2 = 2\times(-2)x \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$



$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a \quad a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$$m_2: \quad m_2 g - T = m_2 a$$

$$m_1: \quad T - m_1 g =$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

چون می‌توان جعبه‌ای به جرم ۵۰kg توسط طنابی که حداکثر می‌تواند ۴۲۰N نیروی تحمل کند از پشت بام پایین

آورد؟

$mg - T_{max} = ma_{min}$

$500 - 420 = 50\, a_{min}$ $\Rightarrow a_{min} = 1.4\ m/s^2$

۴/۵ : قایقی داخل آب شوری که در حال پایین رفتن است به طور قایم از سیمی آویزان است. شتاب

گذشته آب شور قبل از توقف $2.14\ m/s^2$ است. (الف) اگر کشش سیم ۸۹N باشد جرم قایق چقدر است

وقتی آب شور با شتاب گذشته $2.14\ m/s^2$ بالا می‌رود کشش سیم چقدر است؟

$mg - T = ma$ (۱۴)

$m(g-a) = T \Rightarrow m(9.8 - (-2.14)) = 89$

$m = \frac{89}{12.1} = 7.4kg \Rightarrow m = 7.29kg$

$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a) = 7.29(9.8 + 2.14) \Rightarrow T = 89N$

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

تکانه : مومنتوم * Momentum *

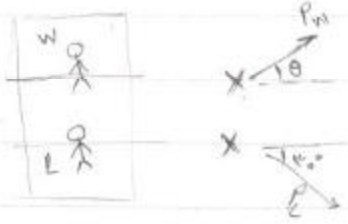
$$\vec{P} = m\vec{v}$$

برخورد :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

اصل بقای تکانه : اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم صفر باشد آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که تکانه کل سیستم ثابت خواهد ماند.

مثال : دونفر به جرم های ۵۰kg و ۷۰kg با سرعت ۳m/s روی یخ اسکیت می‌کنند که ناگهان مرد سنگین‌تر در امتداد محور حرکت با نیروی ۱۰N مرد سبک‌تر را هل می‌دهد به نحوی که مرد سبک‌تر با امتداد قبل از برخورد زاویه ۳۰° می‌سازد. سرعت مرد سنگین‌تر بعد از برخورد چقدر خواهد بود؟



$$F_{ext} = 0 \quad \frac{dP_{cb}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_F \Rightarrow \begin{cases} P_{ix} = P_{fx} \\ P_{iy} = P_{fy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{1ix} + P_{2ix} = P_{1fx} + P_{2fx} \\ P_{1iy} + P_{2iy} = P_{1fy} + P_{2fy} \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{1f}\cos\theta = 210 \\ P_{2f}\cos 30 = 150 \Rightarrow P_{2f} = \frac{150}{\sqrt{3}/2} = 100\sqrt{3} = 170 \frac{kg\,m}{s} \\ P_{1f}\sin\theta - P_{2f}\sin 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{1f}\cos\theta = 210 \\ P_{1f}\sin\theta = 85 \end{cases} \Rightarrow \frac{**}{*} \tan\theta = \frac{85}{210} = 0.4 \Rightarrow \theta = 22°$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مثال: قایقی به جرم ۵۰kg در آب ساکن است فردی به جرم ۷۰kg که با سرعت ۲m/s در طول اسکله می دود

خود را داخل قایق پرت می کند تکلیف های قایق چقدر خواهد بود؟

$$F_{ext}=0 \Rightarrow P=cte \Rightarrow \vec{P}_i=\vec{P}_f \Rightarrow m_1\vec{V}_{1i}+m_2\vec{V}_{2i}=(m_1+m_2)V_f \Rightarrow V_f=\frac{210}{120}=\frac{V}{4}=1.75\ m/s$$

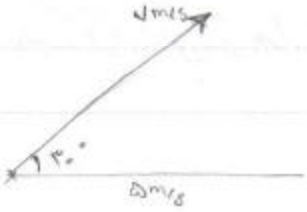
ضربه نیرو:

$$J=\int F dt = P_f - P_i$$

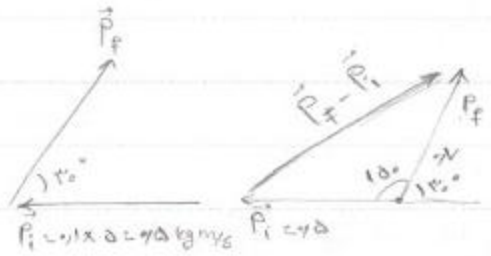
توپ بیسبالی به جرم ۰.۱kg با سرعت ۵m/s در امتداد افق حرکت می کند که در اثر ضربه راکت با سرعت ۲m/s در امتداد

که با جهت حرکت قبلی خود زاویه ۳۰° می سازد برمی گردد مطلوبست تعیین ضربه وارد بر توپ؟

اگر زمان برخورد ۱۵ms باشد نیروی متوسط وارد شده بین توپ و راکت چقدر خواهد بود



$$\vec{J}=\int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{P}$$



$$\vec{J}=\Delta p=\vec{P}_f-\vec{P}_i \qquad |J|=\sqrt{P_i^2+P_f^2-2P_iP_f\cos\theta}=\sqrt{0.5^2+0.7^2-2\times 0.5\times 0.7\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$|\vec{J}|=\sqrt{0.25+0.49+0.7\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.08\ kg\,m/s$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

$\vec{F}_{ext}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{P}=\text{constant}=cte \quad \vec{P}_i=\vec{P}_f \quad \vec{P}_{1i}+\vec{P}_{2i}+\cdots+\vec{P}_{ni}=\vec{P}_{1f}+\vec{P}_{2f}+\cdots+\vec{P}_{nf}$

انواع برخورد ها :

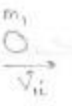
برخورد کشسان : $K_i=K_f$

برخورد ناکشسان : $K_i>K_f$

برخورد انفجاری : $K_i<K_f$

برخورد کاملا ناکشسان : $K_i>K_f$

برخورد کشسان یک بعدی بین دو جسم به جرم های m_1, m_2 که با سرعت های V_{1i}, V_{2i} حرکت می کنند:



بقای تکانه : $m_1\vec{V}_{1i}+m_2\vec{V}_{2i}=m_1\vec{V}_{1f}+m_2\vec{V}_{2f}$

$\Rightarrow$

کشسان : $\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2V_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1V_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$

$m_1(V_{1i}-V_{1f})=m_2(V_{2f}-V_{2i})$ ①

$m_1(V_{1i}^2-V_{1f}^2)=m_2(V_{2f}^2-V_{2i}^2)$ ②

$\frac{②}{①}$: $V_{1i}+V_{1f}=V_{2f}+V_{2i} \Rightarrow$

$V_{1i}-V_{2i}=V_{2f}-V_{1f}$

$V_{2f}=V_{1i}+V_{2i}-V_{1f}$

* سرعت نسبی دو جسم قبل از برخورد با سرعت نسبی دو جسم بعد از برخورد برابر است

$V_{1f}=?? \quad m_1V_{1i}+m_2V_{2i}=m_1V_{1f}+m_2(V_{1i}+V_{1f}-V_{2i}) \Rightarrow$

$(m_1-m_2)V_{1i}+2m_2V_{2i}=(m_1+m_2)V_{1f} \Rightarrow V_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}V_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}V_{2i}$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 (V_{1f} + V_{2i} - V_{1i}) + m_2 V_{2f} \Rightarrow$$

$$2m_1 V_{1i} + (m_2 - m_1) V_{2i} = (m_1 + m_2) V_{2f} \Rightarrow \boxed{V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} V_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2} V_{2i}}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} V_{1f} = 0 + V_{2i} \\ V_{2f} = V_{1i} + 0 \end{cases} \quad V_{2i} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} V_{1f} = 0 \\ V_{2f} = V_{1i} \end{matrix}$$

حالات خاص:

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow \begin{cases} V_{1f} = V_{1i} \\ V_{2f} = 2V_{1i} - V_{2i} \end{cases}$$

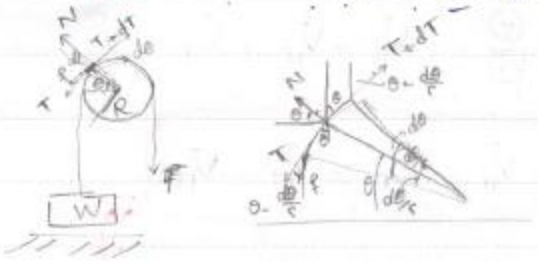
$$m_2 \gg m_1 \Rightarrow \begin{cases} V_{1f} = -V_{1i} + 2V_{2i} \\ V_{2f} = 0 + V_{2i} \end{cases}$$

دیوار $m_2 \gg m_1$ توپ

$$V_{2i} = 0 \quad \begin{cases} V_{1f} = -V_{1i} + 0 \\ V_{2f} = 0 + 0 \end{cases}$$

ضخامت بدون جرمی از روی یک قرقره چوبی به شعاع r رد شده است تا به کمک آن جسم سنگینی به وزن W مطابق شکل از روی زمین بلند کنیم. ضریب اصطکاک لغزشی بین ضخامت و قرقره μ است. نشان دهید حداقل نیروی F که لازم است به ضخامت وارد شود تا بتواند جسم W را از زمین بلند کند برابر است با:

$$F = W e^{\pi\mu}$$



برای زاویه‌های کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ ←

$\sin d\theta = d\theta$

$\cos d\theta = 1$

$$x: (T+dT)\sin\left(\frac{\theta+d\theta}{2}\right) - T\sin\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) - f\sin\theta - N\cos\theta = 0$$

$$y: (T+dT)\cos\left(\theta+\frac{d\theta}{2}\right) - T\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) - f\cos\theta + N\sin\theta = 0$$

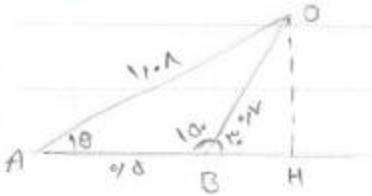
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$\sin\left(\theta + \frac{d\theta}{r}\right) = \sin\theta \cos\frac{d\theta}{r} + \cos\theta \sin\frac{d\theta}{r} = \sin\theta + \cos\theta \frac{d\theta}{r}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{d\theta}{r}\right) = \cos\theta \cos\frac{d\theta}{r} - \sin\theta \sin\frac{d\theta}{r} = \cos\theta - \sin\theta \frac{d\theta}{r}$$

$$x: T\sin\theta + T\cos\frac{d\theta}{r} + dT\sin\theta + dT\cos\frac{d\theta}{r} - T\sin\theta + T\cos\frac{d\theta}{r} = \mu N\sin\theta + N\cos\theta$$

$$y: T\cos\theta - T\sin\frac{d\theta}{r} + dT\cos\theta - dT\sin\frac{d\theta}{r} - T\cos\theta - T\sin\frac{d\theta}{r} = \mu N\cos\theta - N\sin\theta$$



$$OH = 0.7\sin 10^\circ = 11.8\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{0.7\sin 10^\circ}{11.8}$$

ب) $J = \bar{F}_{av}\Delta t \rightarrow F = \frac{J}{\Delta t} = \frac{11.8}{15\times 10^{-2}} = \frac{1180}{15} = 78.7\,N$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مثال: والی با وزن W می‌تواند بصورت بدون اصطکاک روی یخ حرکت کند. فردی به وزن w روی والی

ایستاده است و با سرعت V_{rel} نسبت به والی و در امتداد افق به سمت جلو حرکت می‌کند. اگر فرد با سرعت V_0 نسبت به سطح یخ حرکت کند تغییر سرعت والی چقدر خواهد بود؟

$$(m+M)\vec{V}_0 = m\vec{V}_{1f} + M\vec{V}_{2f} = m(\vec{V}_{rel} + \vec{V}_{2f}) + M\vec{V}_{2f}$$

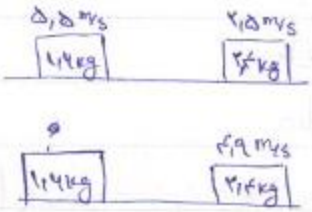
$$\vec{V}_{PG} = \vec{V}_{PW} + \vec{V}_{WG} \Rightarrow \vec{V}_{1f} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{2f}$$

$$(m+M)\vec{V}_0 = (m+M)\vec{V}_{2f} + m\vec{V}_{rel} \Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{V}_{2f} + \frac{m}{M+m}\vec{V}_{rel}$$

$$\Delta\vec{V}_{\text{والی}} = \vec{V}_{2f} - \vec{V}_0 = -\frac{m}{M+m}\vec{V}_{rel} = -\frac{w}{w+W}\vec{V}_{rel}$$

مثال ۲۵: در شکل مقابل جعبه‌ها با سرعت $5.5\,m/s$ و $2.10\,m/s$ روی سطح بدون اصطکاک بر خورد می‌کنند سرعت جعبه

$4.4\,kg$ بعد از برخورد چقدر است؟



$$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = m_1\vec{V}_{1f} + m_2\vec{V}_{2f}$$

مثال ۲۶: یک سفینه فضایی با سرعت $3860\,km/h$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. زمانیکه بخش پیشران (موتور)

سفینه از خود سفینه جدا شود دارای سرعت نسبی $125\,km/h$ نسبت به بخش فرماندهی خواهد بود. اگر جرم

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

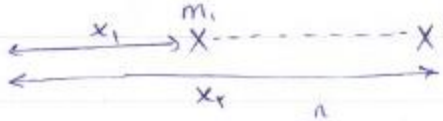
Subject: Year: Month: Date:

سکونه چهار برابر سمت فرمانده جرم داشته باشد سرعت کدام فرماندهی بعد از جدایی دو بخش سفینه چقدر خواهد بود؟

مرکز جرم: (center of mass) نقطه‌ای است که به گونه‌ای رفتار می‌کند که گویی جرم کل جسم در آن نقطه متمرکز شده است

مرکز جرم سیستم ذرات گسسته:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2}$$



$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_ny_n}{m_1+m_2+m_3+\dots+m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \dots + m_nz_n}{m_1+m_2+\dots+m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

مثال: سه ذره به جرم‌های $1kg$ و $2kg$ و $5kg$ به ترتیب در موقعیت‌های $(0,0,0)$، $(1,2,3)$ و $(3,-2,-1)$ قرار دارند. مرکز جرم مجموعه کجاست؟ $(CM = (\frac{17}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{1}{8}))$

$m_1 = 1 \quad (0,0,0)$

$m_2 = 2 \quad (1,2,3)$

$m_3 = 5 \quad (3,-2,-1)$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{0+2+15}{8} \Rightarrow x_{cm} = \frac{17}{8}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{0+4-10}{8} \Rightarrow y_{cm} = \frac{-7}{8}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{0+4-5}{8} \Rightarrow z_{cm} = \frac{1}{8}$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مرکز جرم سیستم های پیوسته :

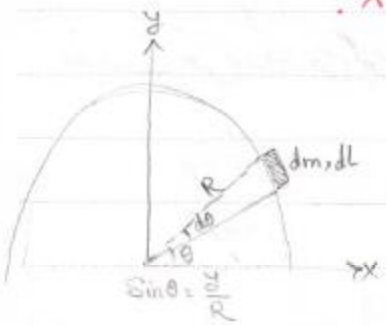
$$x_{cm} = \frac{dm_1 x_1 + dm_2 x_2 + dm_3 x_3}{dm_1 + dm_2 + dm_3}$$

و

توزیع پیوسته

- خطی (طول) λ : چگالی خطی : جرم واحد طول — $\lambda = \frac{dm}{dL}$ — $\bar{\lambda} = \frac{m}{L}$ — توزیع یکنواخت $\lambda = \bar{\lambda}$
- سطحی σ : چگالی سطحی : جرم واحد سطح — $\sigma = \frac{dm}{dA}$ — $\bar{\sigma} = \frac{m}{A}$ — توزیع یکنواخت $\sigma = \bar{\sigma}$
- حجمی ρ : چگالی حجمی : جرم واحد حجم — $\rho = \frac{dm}{dV}$ — $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$ — توزیع یکنواخت $\rho = \bar{\rho}$

مطلوبست تعیین مرکز جرم نیم حلقه‌ای به شعاع R و توزیع خطی یکنواخت λ :



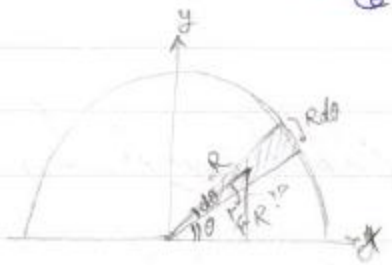
$x_{cm} = 0$ ، $y_{cm} \neq 0$

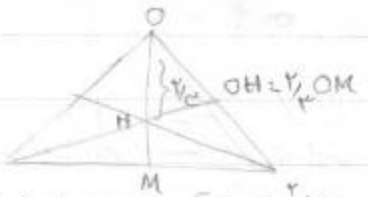
$z_{cm} = 0$ ، $y_{cm} = \frac{2R}{\pi}$

$\lambda = \frac{m}{L} = \frac{m}{\pi R}$ ، $\lambda = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda dL = \lambda R d\theta$

$$y_{cm} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int R\sin\theta \lambda R d\theta}{m} = \frac{\lambda R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta}{\lambda \pi R} = \frac{R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi}$$

مطلوبست تعیین مرکز جرم نیم‌قرص یکنواختی به شعاع R و چگالی سطحی σ :





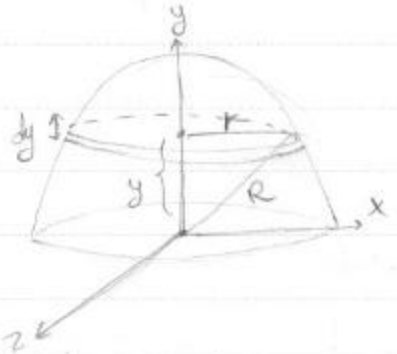
$x_{cm} = 0$ ، $y_{cm} \neq 0$

$\sigma = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \sigma dA = \sigma \frac{1}{2}(Rd\theta)R = \sigma \frac{1}{2} R^2 d\theta$

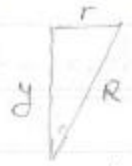
$$y_{cm} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int \frac{2}{3} R\sin\theta \, \sigma \frac{1}{2} R^2 d\theta}{m} = \frac{\sigma R^3 / 3 \int_0^\pi \sin\theta}{\sigma A} = \frac{\frac{2\sigma R^3}{3}}{\sigma \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

مطلوبست تعیین مرکز جرم نیم کره توپر به شعاع R و چگالی حجمی یکنواخت ρ؟



$x_{cm} = z_{cm} = 0$

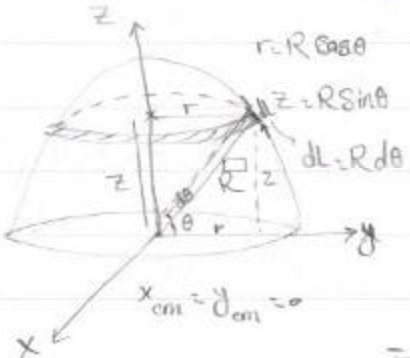


$\rho = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = \rho dv = \rho \pi r^2 dy \qquad r^2 = R^2 - y^2$

$$y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y \rho \pi r^2 dy}{m} = \frac{\rho\pi \int y r^2 dy}{\rho v} = \frac{\rho\pi \int y(R^2-y^2)dy}{\rho \frac{2}{3}\pi R^3}$$

$$y_{cm} = \frac{\frac{R^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}}{\frac{2}{3}R^3} = \frac{\frac{R^4}{4}}{\frac{2}{3}R^3} = \frac{3R}{8}$$

مطلوبست تعیین مرکز جرم نیم کره توپر به شعاع R و چگالی سطحی جرمی δ؟



$x_{cm} = y_{cm} = 0$

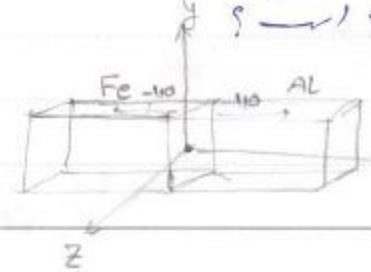
$$z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int z\,dm}{m} = \frac{\int z \delta\, dA}{\delta 2\pi R^2}$$

$$dA = 2\pi r(dL) = 2\pi R\,d\theta$$

$$= \frac{\int R\sin\theta\, \delta\, 2\pi r R\, d\theta}{\delta 2\pi R^2} \Rightarrow z_{cm} = R\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= R\int \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = R/4$$

دو ظلف آلومینیمی و آهنی هرکدام به ابعاد $1\times2\times3\ cm^3$ از وسط 1×2 به هم جسیده اند مطلوبست تعیین مرکز جرم مجموعه اگر چگالی آهن $7.8\ g/cm^3$ و چگالی آلومینیوم $2.7\ g/cm^3$ است؟



$y_{cm} = z_{cm} = 0 \qquad x_{cm} \neq 0$

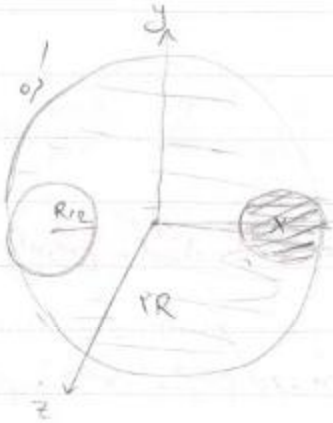
میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{\rho_1V_1x_1 + \rho_2V_2x_2}{\rho_1V_1 + \rho_2V_2} = \frac{7/8\Delta(-1/5) + 2/2(1/0)}{7/8\Delta + 2/2}$$

	x	y	z
مرکز جسم	۰	۰	$\frac{2R}{8}$
مرکز قرص	۰	۰	$\frac{4R}{3\pi}$
مرکز کره	۰	۰	$\frac{3R}{8}$
مرکز جرم مجموعه	۰	۰	$\frac{R}{2}$

محاسبه مختصات مرکز جرم اشکال زیر:

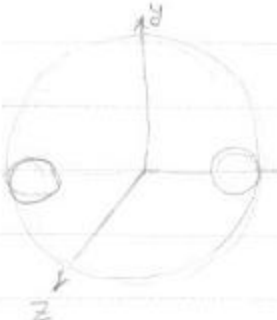


$x_{cm} \neq 0 \qquad y_{cm} = z_{cm} = 0$

$m = \rho V \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3$

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_0 + m_2\frac{3R}{2}}{m_1+m_2} = \frac{0 + \rho\frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3 \times \frac{3R}{2}}{\rho\frac{4}{3}\pi(2R)^3 - \rho\frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3}$$

$$= \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^4}{8}\times\frac{3R}{2}}{\rho\frac{4}{3}\pi(8R^3 - \frac{R^3}{8})} = \frac{\frac{R^4}{8}\times\frac{3R}{2}}{\frac{63R^3}{8}} = \frac{3R}{63}$$



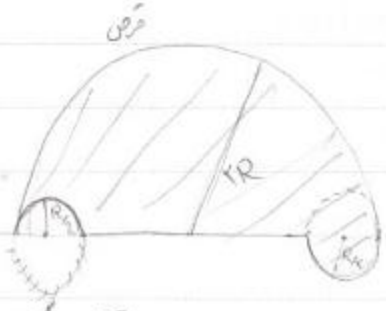
$z_{cm} = y_{cm} = 0 \qquad x_{cm} \neq 0$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_0 + 6\pi(\frac{R}{2})^2 \times \frac{3R}{2}}{6\pi(2R)^2 - 6\pi(\frac{R}{2})^2} = \frac{\frac{R^2}{2}\times\frac{3R}{2}}{4R^2 - \frac{R^2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3R^2}{8}}{\frac{15R^2}{2}} = \frac{3R}{20} = \frac{R}{10}$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!



$z_{cm} = 0$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times 0 + \frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2 \times \frac{3R}{2}}{\frac{1}{2}\pi(2R)^2}$$

$$= \frac{\frac{R}{2} \times \frac{2R}{2}}{2R^2} = \frac{2R}{16}$$

m_4

چون مرکز جرم m_2 روی محور x هاست و جرم m_3 نیز روی محور x هاست

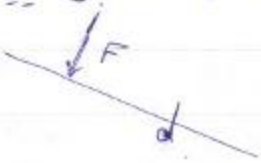
$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{1}{2}\pi(2R)^2 \frac{4}{3\pi}(\text{نصف}) + \frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2(-\frac{4}{3\pi}(\text{نصف}) + \frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2(\frac{4}{3\pi}\frac{R}{2})}{\frac{1}{2}\pi(2R)^2}$$

$$y_{cm} = \frac{4R^2(\frac{4}{3\pi})(2R) - \frac{R^2}{4}\frac{4}{3\pi}\frac{R}{2} - \frac{R^2}{4}\frac{2}{3\pi}\frac{R}{2}}{4R^2} = \frac{8R}{24\pi} - \frac{R}{24\pi} - \frac{R}{24\pi} = (\frac{6-2}{24\pi})R = \frac{4R}{24\pi}$$

لختی انتقالی - گشتاور ماند - خاصیتی از جسم است که در برابر تغییر حرکت دورانی مقاومت می‌کند.

لختی انتقالی

جرم جسم: خاصیتی از جسم که در مقابل تغییر حرکت انتقالی مقاومت می‌کند.



$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = rf\sin\theta$$

گشتاور ماند $I = Mr^2$ kgm^2

انتقالی	دورانی
x	θ
v	ω
a	α
m	I
F	τ

$$x = x_0 + v_0 t$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

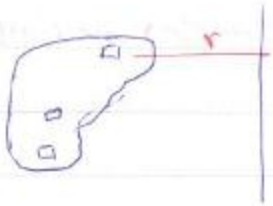
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

* $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$ * $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

گشتاور ماند سیستم های پیوسته :



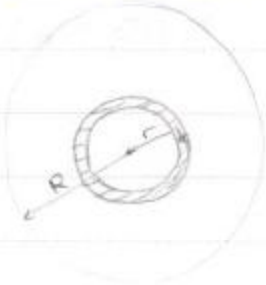
$dI = r^2 dm$

$I = \int dI = \int r^2 dm$

مثال: مطلوبست تعیین گشتاور ماند حلقه‌ای به جرم m و شعاع R نسبت به محوری عمود بر صفحه حلقه و گذرا از مرکز

حلقه: $dI = R^2 dm \quad I = \int dI = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 m$

مثال: مطلوب است گشتاور ماند قرص به جرم m و شعاع R نسبت به محور عمود بر صفحه قرص و گذرا از مرکز قرص:



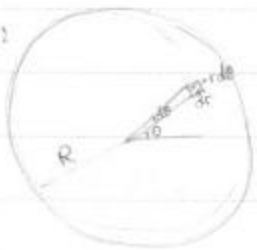
$dI = r^2 dm$

$dm = \sigma dA$

$I = \int dI = \int r^2 dm \xrightarrow{dm = \sigma 2\pi r dr} \int r^2 \sigma 2\pi r dr = \sigma 2\pi \int r^3 dr$

$I = \sigma 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \sigma\pi \frac{R^4}{2} = \frac{1}{4}R^2(\sigma\pi R^2) = \frac{1}{4}mR^2$

روش دوم:



$dI = r^2 dm = r^2 \sigma dA = r^2 \sigma (dr)(r d\theta)$

$I = \int dI = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \sigma\, dr\, d\theta = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}R^2(\sigma\pi R^2) = \frac{1}{4}mR^2$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

مطلوبست تعیین گشتاور ماند میله نازک یکنواخت به طول L نسبت به محوری عمود بر میله و گذرا از (الف) مرکز میله

ب) انتهای میله. (جرم میله m در نظر بگیرید.)

$dI = x^2 dm \quad \lambda = \frac{dm}{dx} \quad x^2 \lambda dx$

$I = \int dI = \int x^2 \lambda dx = \lambda \int x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{L^2}{12}\lambda L = \frac{mL^2}{12}$

ب)

$= \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3}L^2(\lambda L) = \frac{mL^2}{3}$

$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{L/4}^{3L/4} = \frac{\lambda}{3}\left(\left(\frac{3L}{4}\right)^3 - \left(-\frac{L}{4}\right)^3\right)$

$I = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{27+1}{64}\right)L^3 = \frac{\lambda \times 28}{3 \times 64} L^3 = \frac{7}{48} mL^2$

مطلوبست تعیین گشتاور ماند کره ای توپر به جرم m و شعاع R و چگالی حجمی یکنواخت ρ ؟

$dI = \frac{1}{2} r^2 dm$

$\rho = \frac{dm}{dV}$

$dm = \rho dV$

$I = \frac{1}{2}\int r^2 dm \quad dm = \rho \pi r^2 dz \quad r^2 = R^2 - z^2 \quad \frac{1}{2}\int r^2 \rho \pi r^2 dz = \frac{1}{2}\rho\pi \int r^4 dz$

$= \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^2 dz \; \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{+R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \frac{1}{2}\rho\pi \left(R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-R}^{R}$

$I = \frac{1}{2}\rho\pi \left[\left(R^4 R - \frac{2R^2 R^3}{3} + \frac{R^5}{5}\right) - \left(-R^4 R - \frac{2R^2}{3}(-R^3) - \frac{R^5}{5}\right)\right]$

میران

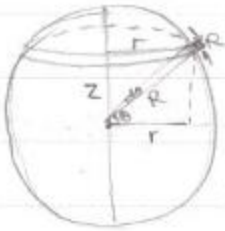
pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

$$I=\frac{1}{2}\rho\pi\left(2R^5+\frac{-4R^5}{3}+\frac{2R^5}{5}\right)\Rightarrow I=\frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{30-20+6}{15}\right)R^5$$

$$M=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I=\frac{1}{2}\rho\pi\,\frac{16}{15}R^5=\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)\frac{2}{5}R^2=\frac{2}{5}mR^2$$

مطلوبست تعیین گشتاور ماند پوسته کروی به جرم m و شعاع R با چگالی سطحی یکنواخت σ نسبت به یکی



از قطرهای پوسته:

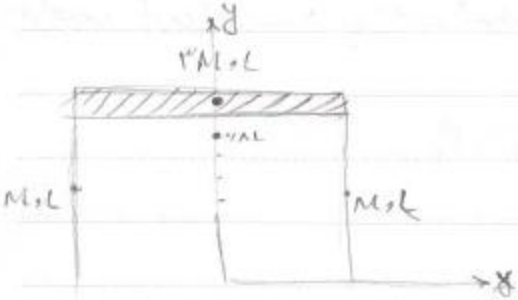
$$dI=r^2dm\rightarrow I=\int r^2dm \qquad \begin{matrix}dm=\sigma dA\\ dm=\sigma(2\pi r R d\theta)\end{matrix}\qquad r=R\cos\theta$$

$$I=\int r^2\sigma 2\pi r R d\theta=\sigma 2\pi R\int r^3 d\theta\Rightarrow I=\sigma 2\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^3\cos^3\theta\,d\theta$$

$$\int\cos^3\theta d\theta=\int\cos^2\theta\cos\theta d\theta=\int(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta=\int\cos\theta d\theta-\int\sin^2\theta\underbrace{\cos\theta d\theta}_{da}$$

$$\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)}{3}\right)=4/3$$

$$\sigma 2\pi R^4\,4/3=(\sigma 2\pi R^2)\,2/3\,R^2$$



مثال ۱۲۴: مطلوبست تعیین مرکز جرم شکل مقابل:

(نقطه وسطی)

$$x_{cm}=0\qquad y_{cm}\neq 0\qquad z_{cm}=0$$

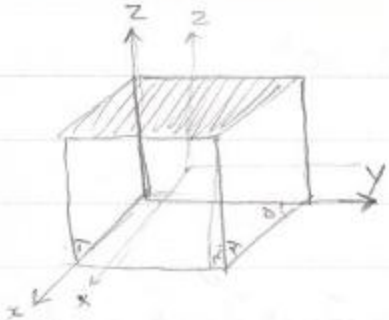
$$y_{cm}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{M\frac{L}{2}+3ML+ML/2}{M+3M+M}=\frac{4ML}{5M}=\frac{4L}{5}$$

یک ملکه به ضلع 40cm در نظر بگیرید که مرکز هر وجه آن مبدا مختصات آن وجه باشد مرکز جرم

مجموعه کجا خواهد بود؟

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!



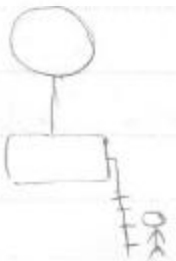
$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{m\times 20 + m\times 20 + m\times 0 + m\times 40 + m\times 20}{5m} = 20\,cm$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 + m_5y_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{m\times 0 + m\times 40 + m\times 20 + m\times 20}{5m} = 20\,cm$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4 + m_5z_5}{5m} = \frac{m\times 20 + m\times 20 + m\times 20 + m\times 20 + m\times 0}{5m} = \frac{4}{5}\times 20 = 16\,cm$$

Q) در $z_{cm} = 0$ و $y_{cm} = 0$ $\quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{m\times 0 + m\times 0 + m\times 0 + m\times 0 + m(-20)}{5m} = -4\,cm$

فردی به جرم m از ضلعی بی جرم که از بالای به جرم M آویزان است در نظر بگیرید. این سیستم در حال سکون است. اگر مرد با سرعت v نسبت به طناب بالا برود جهت حرکت این و سرعت حرکت این چقدر خواهد بود. اگر مرد از حرکت باز ایستد حرکت مجموعه چه تغییری خواهد کرد؟



if $F_{ext} = 0$ then $P_i = P_f$

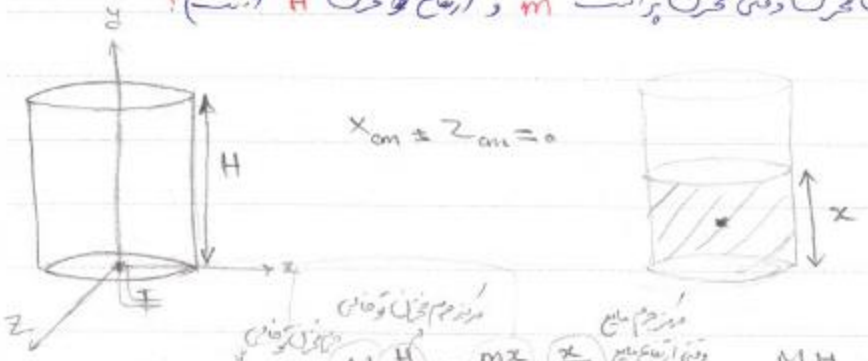
$$\vec{V}_{PG} = \vec{V}_{Pb} + \vec{V}_{bG} \qquad P_{ii} + P_{ri} = P_{if} + P_{rf}$$

$$0 = M\vec{V}_{bG} + m\vec{V}_{PG}$$

$$0 = M\vec{V}_{bG} + m(\vec{V}_{Pb} + \vec{V}_{bG}) = (M+m)\vec{V}_{bG} + m\vec{V}_{Pb} \Rightarrow \vec{V}_{bG} = -\frac{m\vec{V}_{Pb}}{M+m} = -\frac{m\vec{V}}{M+m}$$

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

یک مخزن استوانه‌ای که ابتدا از مایع پر شده است در نظر بگیرید اگر مخزن توسط شیری که پایین آن تعبیه شده است تخلیه شود حرکت مرکز جرم مجموعه را توصیف کنید. کمترین مقدار مرکز جرم چقدر خواهد بود؟ (جرم مخزن خالی M و جرم مایع درون مخزن وقتی مخزن پر است m و ارتفاع مخزن H است)



$x_{cm} = z_{cm} = 0$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + \left(\frac{mx}{H}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{M + \frac{mx}{H}} = \frac{\frac{MH}{2} + \frac{mx^2}{2H}}{M + \frac{mx}{H}}$$

(جرم مخزن وقتی مقدار x مایع درون آن باشد)

$$\frac{dy_{cm}}{dx} = \frac{\frac{mx}{H}\left(M + \frac{mx}{H}\right) - \frac{m}{H}\left(\frac{MH}{2} + \frac{mx^2}{2H}\right)}{\left(M + \frac{mx}{H}\right)^2} = 0 \Rightarrow \left(Mx + \frac{mx^2}{H}\right) - \left(\frac{MH}{2} + \frac{mx^2}{2H}\right) = 0$$

$$\frac{m}{2H}x^2 + Mx - \frac{MH}{2} = 0$$

$$x = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 + Mm}}{\frac{m}{H}} \Rightarrow x = \frac{-M + \sqrt{M^2 + Mm}}{\frac{m}{H}}$$

میران

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!

Subject: Year: Month: Date: / /

نرده‌ای: تنها دارای مقدار می‌باشد مثل دما، جرم، طول و ...

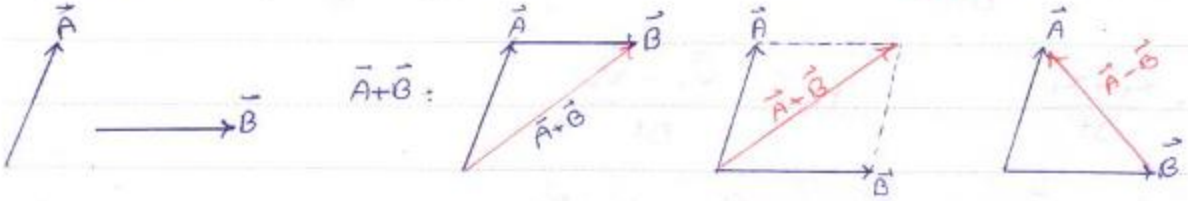
کمیت‌های نرده‌ای:

برداری: علاوه بر مقدار دارای جهت نیز می‌باشد مثل جابجایی ($\vec{d}$)، سرعت ($\vec{v}$)، نیرو ($\vec{F}$)، شتاب ($\vec{a}$) و ...

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)i + (A_y \pm B_y)j + (A_z \pm B_z)K$$ جبری:

جمع و تفاضل بردارها:

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$ ترسیمی:



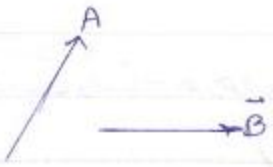
$\vec{A}\cdot\vec{B}$ = عدد $= |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ داخلی - نرده‌ای - اسکالر

ضرب بردارها:

$\vec{A} \times \vec{B}$ = بردار $\Rightarrow$ اندازه بردار حاصل ضرب خارجی $= |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ خارجی - برداری

$$\text{اندازه بردار} = |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)i + (A_zB_x - A_xB_z)j + (A_xB_y - A_yB_x)K$$



$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ دوسو ⊗ — بوسو ⊙ — $\vec{C'} = \vec{B}\times\vec{A}$

$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

$C' = \vec{B}\times\vec{A}$ — $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ — $\vec{A}\cdot\vec{B} = B\cdot\vec{A}$

pdfMachine
A pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, simply open the document you want to convert, click “print”, select the “Broadgun pdfMachine printer” and that’s it! Get yours now!